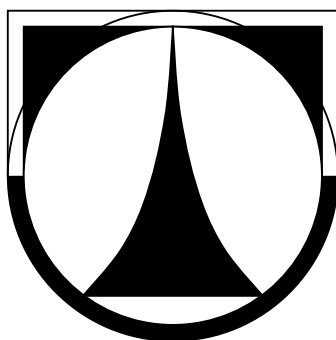


Technická univerzita v Liberci

Hájkova 6, Liberec

Fakulta textilná



DIPLOMOVÁ PRÁCA

Liberec 2006

Monika Smolková

Technická univerzita v Liberci

Hálkova 6, Liberec

Fakulta textilná

Študijný program: M3106 — Textilní inženýrství

Študijný odbor: Textilní materiálové inženýrství

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Modelovanie ohybu priadze

Modelling of the yarn bending

453

MONIKA SMOLKOVÁ

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Zdeněk Kalousek, CSc.

Konzultant: Ing. Iva Mertová

Rozsah práce: 35 strán

Počet obrázkov: 18

Počet tabuliek: 4

Liberec

2006

Prehlásenie

Prehlasujem, že predložená diplomová práca je pôvodná a spracovala som ju samostatne. Prehlasujem, že citácia použitých prameňov je úplná, že som v práci neporušila autorské práva (v zmysle zákona č. 121/2000 Sb. o práve autorskom a o právach súvisujúcich s právom autorským).

Súhlasím s umiestnením diplomovej práce v Univerzitnej knižnici TUL.

Bola som zoznámena s tým, že na moju diplomovú prácu sa plne vzťahuje zákon č. 121/2000 o práve autorskom, hlavne § 60 (školské dielo).

Beriem na vedomie, že TUL má právo na uzavretie licenčnej zmluvy o použití mojej diplomovej práce a prehlasujem, že **súhlasím** s prípadným použitím mojej diplomovej práce (predaj, požičanie apod.).

Som si vedomá toho, že použiť moju diplomovú prácu, či poskytnúť licenciu k jej využitiu môžem len so súhlasom TUL, ktorá má právo odo mňa požadovať primeraný príspevok na úhradu nákladov, vynaložených na vytvorenie diela (až do ich skutočnej výšky).

V Liberci 15. mája 2006

.....

Monika Smolková

Podakovanie

Podakovanie patrí predovšetkým vedúcemu diplomovej práce RNDr. Zdeňkovi Kalouskovi, CSc., ktorý sa na práci podieľal svojou trpezlivosťou, cennými radami a kritickými, ale konštruktívnymi pripomienkami. Ďakujem aj konzultantke Ing. Ive Mertovej za pomoc a rady, ktoré mi poskytla pri riešení diplomovej práce. V neposlednom rade sa chcem poďakovať aj môjmu priateľovi, rodine a kamarátom za morálnu a emočnú podporu.

Anotácia

Diplomová práca sa zaoberala problematikou modelovania ohybu priadze a vychádzala zo súčasného stavu v tejto oblasti textilnej vedy. Jej cieľom bolo vytvoriť taký model, ktorý by zahŕňal všetky významné zmeny priadze pri ohybe a ktorý by bol prijateľný. Prácu tvorili dve hlavné oblasti. Jednalo sa o časť teoretickú, v ktorej bol navrhnutý a vypracovaný model a časť praktickú, ktorá zisťovala pomocou experimentu vstupné dáta do modelu. Ďalej sa praktická časť zaoberala meraním ohybovej tuhosti a vplyvom ohybu priadzí na vlastnosti tkanín. Výsledky ukazovali, že namerané a vypočítané ohybové tuhosti sa veľmi nelíšia. Za najväčší prínos práce vzhľadom k riešenej problematike bolo možné považovať priblíženie sa k objasneniu a predpovedi dejov, ku ktorým dochádza pri zaťažovaní textílií.

Kľúčové slová

priadza, ohyb, simulácia

Annotation

Diploma thesis was dealing with problems of yarn bending and it is issuing from the present state in this area of textile science. Its aim was to find a model, which includes all the significant changes of yarn with bending, and it is acceptable. The thesis was formed from two principal fields. The first one is the theoretical part, in which was suggested and elaborated a model and practical part was searching by means of experiment for the entrance dates in the model. Next was practical part dealing with measurement of flexural rigidity and with influence of yarn bending on fabric properties. Results shown, that measured and calculated flexural rigidities are close to each other. The biggest contribution of thesis, with respect to problem, you can consider approximation to explication and prediction of precesses linked to fabric straining.

Keywords

yarn, bending, simulation

Obsah

Úvod	1
1 Teoretická časť	2
1.1 Modely ohybu priadze	2
1.2 Zmeny priadze pri ohybe	7
1.2.1 Popis zmien v priadzi	8
1.2.2 Popis zmien prierezu priadze	10
1.2.3 Popis zmien prierezu vlákien	14
1.2.4 Popis vzťahu medzi prierezom priadze a prierezom vlákien . .	15
1.3 Optimalizácia popisu	17
1.4 Použité modely priadze	18
1.5 Deformačná energia	19
1.5.1 Popis priadze po deformácii	19
1.5.2 Pomerné predĺženie priadze	20
1.5.3 Hustota deformačnej energie	20
1.5.4 Optimalizácia parametrov	21
1.6 Ohybová tuhosť	22
1.7 Výsledky	24
2 Praktická časť	26
2.1 Cieľ praktickej časti	26
2.2 Vstupné dáta	26
2.2.1 Youngov modul pružnosti	26
2.2.2 Poissonov pomer	26
2.2.3 Priemer priadze	27
2.2.4 Zaplnenie	27
2.2.5 Jemnosť	27
2.2.6 Zákrut	28
2.3 Ohybová tuhosť	28

2.4	Vplyv ohybu na geometriu tkanín	30
2.5	Výsledky praktickej časti	34
	Záver	35
	Zoznam použitých prameňov	36

Zoznam obrázkov

1.1	<i>Skrutkovicový filament</i>	3
1.2	<i>Priemet ohnutej skrutkovice do roviny xy</i>	5
1.3	<i>Experimentálne zariadenie</i>	6
1.4	<i>Vlákná pri ohybe</i>	7
1.5	<i>Prierez priadze pri ohybe</i>	8
1.6	<i>Vybočenie osi priadze</i>	9
1.7	<i>Kolmý a šikmý rez priadzou</i>	10
1.8	<i>Priemet vektora v do roviny ϱ</i>	11
1.9	<i>Priemety polos elipsy v rovine xy a ϱ</i>	12
1.10	<i>Šikmý a kolmý rez</i>	13
1.11	<i>Štruktúrálna bunka pred deformáciou a po deformácii</i>	15
1.12	<i>Vzťah medzi štruktúrálnou bunkou a prierezom priadze</i>	16
1.13	<i>Rozloženie vlákien pred a po deformácii prierezu</i>	17
1.14	<i>Závislosť pomerného predĺženia na polohe na skrutkovici</i>	18
1.15	<i>Modely priadze</i>	19
1.16	<i>Závislosť ohybového momentu na krivosti</i>	24
1.17	<i>Závislosť pomeru polos e a f na krivosti</i>	25
1.18	<i>Závislosť vybočenia osi priadze ψ na krivosti</i>	25
2.1	<i>Tvar ohybovej krivky</i>	29

Zoznam tabuliek

1.1	<i>Hodnoty ohybových tuhostí z modelov</i>	24
2.1	<i>Namerané charakteristiky priadzí</i>	28
2.2	<i>Namerané ohybové tuhosti priadzí</i>	29
2.3	<i>Dostavy</i>	30

Zoznam symbolov

Symbol	Jednotka	Význam
a	$[m]$	polomer závitú
A, B	$[m]$	rozмеры štruktúrálnej bunky
a_0, b_0	$[m]$	rozмеры priadze v medznom stave
b	$[m]$	redukovaná výška závitú
C	$[m]$	rozmer štruktúrálnej bunky
$\frac{dl}{dt}$	$[m]$	zmena dĺžky vlákna po deformácii
$\frac{dl_0}{dt}$	$[m]$	zmena dĺžky vlákna pred deformáciou
e, f		polosi elipsy v rovine kolmej na os vlákna
E_1, E_3	$[Pa]$	materiálový parameter
I	$[m^4]$	moment zotrvačnosti
j	$[-]$	parameter pre popis uhla stúpania
k, l, m		konštanty zo všeobecnej rovnice elipsy
K	$[N]$	ťahová tuhosť vlákna
M	$[Nm]$	ohybový moment
n	$[-]$	konštanta pre popis vzťahu medzi parametrami skrutkovice
p		hlavná polos elipsy
p', q'		priemet polos elipsy do roviny kolmej na os vlákna
q		vedľajšia polos elipsy
r	$[m]$	polomer priadze
R	$[m]$	polomer krivosti ohybu
S	$[m^2]$	plocha elipsy v rovine xy

S'	$[m^2]$	plocha elipsy v rovine kolmej na os vlákna
t, t^*		parameter krivky
t_d		dotyčnicový vektor k vláknu
t_1, t_2, t_3		zložky dotyčnicového vektora
u, v		súradnicový systém
u', v'		priemet súradníc do roviny kolmej na os vlákna
w	$[N]$	hustota deformačnej energie
W	$[J]$	deformačná energia
W_z	$[J]$	deformačná energia jedného závitu
x, y, z		súradnicový systém
x_1, y_1, z_1		súradnicový popis po prvom kroku deformácie
x_2, y_2, z_2		súradnicový popis po druhom kroku deformácie
x_3, y_3, z_3		súradnicový popis po treťom kroku deformácie
Y	$[Pa]$	Youngov modul pružnosti
α	$[-]$	násobok zmeny priemeru vlákna v smere osi y
β	$[-]$	násobok zmeny priemeru vlákna v smere osi x
ε	$[-]$	pomerné predĺženie
γ	$[rad]$	uhol stúpania skrutkovice
γ_r	$[rad]$	uhol stúpania skrutkovice na povrchu priadze
κ	$[m^{-1}]$	krivosť ohybu
κ_r	$[-]$	pomerná krivosť ohybu
ν_{12}, ν_{13}	$[-]$	materiálový parameter
ϱ		označenie roviny kolmej na os vlákna
σ	$[-]$	Poissonov pomer
τ	$[m]$	polomer vlákna
ξ	$[-]$	násobok zmeny dĺžky
ψ	$[^\circ]$	uhol vybočenia

Úvod

Ohyb je jedným z bežných zaťažení priadze. Prakticky sa priadza neohýba len vo väzbách pletenín, či tkanín, ale často sa ohýba okolo rôznych plôch pri spracovaní, napr. okolo vodičov. Táto práca sa zaoberá vytvorením modelu, ktorý by zahŕňal zmeny a správanie sa ohýbanej priadze.

Teoretickú časť možno pomyselne rozdeliť na dve oblasti. Prvá, menšia oblasť je venovaná popisu zverejneného modelu ohybu priadze. Je uvedený iba jeden s ohľadom na rozsah, ktorý by zabral popis ďalších modelov.

Druhá časť je venovaná detailnému popisu nami vytvoreného modelu, jeho predpokladov, východísk a záverov.

V praktickej časti je popísané získanie vstupných hodnôt do modelu a meranie ohybovej tuhosti, ktorá je základnou charakteristikou popisujúcou správanie sa materiálu pri ohybovom zaťažení. Ďalej tu možno nájsť obrázky tkanín s rôznymi väzbami a slovne vyhodnotený vzájomný vzťah medzi väzbou tkaniny a efektami sprevádzajúcimi ohyb osnovných a útkových nití.

Kapitola 1

Teoretická časť

1.1 Modely ohybu priadze

Modelovaním mechanického správania sa priadzí pri rôznych druhoch zaťaženia sa v súčasnej dobe nezaobrá mnoho literatúry. Väčšina autorov sa zaoberá viac metódami zisťovania týchto vlastností. Napriek tomu však je na tomto mieste uvedený aspoň jeden z prístupov.

Autori Göktepe, Lawrence a Leaf uvádzajú vo svojom článku [4] model, do ktorého zahrnuli nielen ohyb ale súčasne aj ťah a tlak. Tento výber zaťaženia odôvodňujú tým, že v spracovaní priadzí a ich aplikáciách sú priadze ovíjané okolo rôznych vodičov, kde sú namáhané práve na ťah, tlak a ohyb.

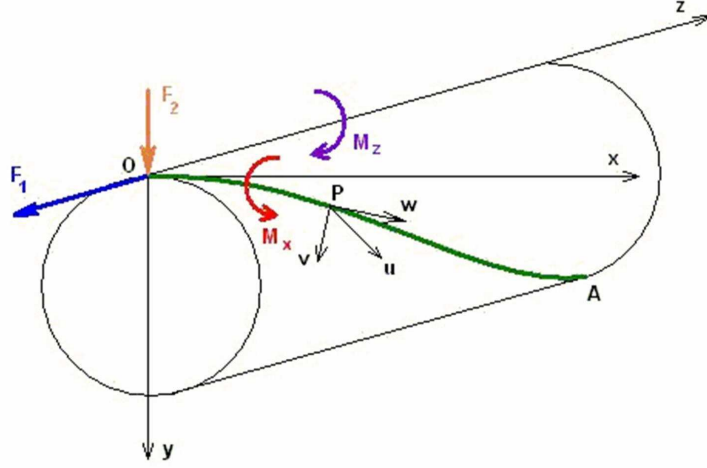
V prvom rade študujú idealizovaný model štruktúry priadze, ktorý predpokladá, že každé vlákno alebo filament nasleduje špirálovú dráhu a priadza má v nedeformovanom stave kruhový prierez. Výskum správania sa jednoduchej skrutkovice môže byť preto považovaný ako prvý krok smerom k mechanickej analýze deformácie priadze za súčasného ťahovania, stláčania a ohybu.

Je uvažovaná skrutkovica s uhlom stúpania γ a polomerom a , ktorá je vytvorená z filamentu symetrického okolo jej centrálnej osi. Na obr. 1.1 je zobrazený polovičný závit nekonečne dlhej špirály pri pôsobení tlakovej sily F_2 , ťahovej sily F_1 a ohybového momentu M_x v mieste O .

Vzhľadom k symetrii polovičného závitu pri deformácii, je nutné do silovej rovnováhy zahrnúť iba moment M_z (zvyšné reakcie sú nulové).

Sú zavedené dve súradnicové sústavy:

- xyz sú pevné osi definujúce polohu O a
- $Puvw$ je sústava kolmých pohyblivých osí, kde P je ľubovoľný bod na závite.



Obr. 1.1: *Skrutkovicový filament*

Smer týchto osí je volený tak, že keď je P v O , Pv sa zhoduje s Oy . Pw je smernica dotyčnice k závitú a zmysel osí je pravotočivý.

Predpokladá sa, že tenká tyčinka (článok je založený na teórii ohybu a zakrucovania tenkých tyčiniek) je sama o sebe neroztiahnuteľná, nedeformovateľného prierezu a nedeformovateľná v strihu. Za týchto okolností, rovnice rovnováhy deformovaného závitú sú (1.1), kde G , G' a H sú zložky ohybového a krútiaceho momentu okolo osí $Puvw$; p_1 , q_1 a r_1 sú zložky krivosti a otočenia okolo týchto osí; EI a C sú ohybová a torzná tuhosť tyčinky; a p_0 , q_0 a r_0 sú počiatočné zložky krivosti a pootočnia tyčinky.

$$\begin{aligned} G &= EI(p_1 - p_0) \\ G' &= EI(q_1 - q_0) \\ H &= C(r_1 - r_0) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ak sú súradnice zvolené ako bolo popísané vyššie, potom platí (1.2).

$$\begin{aligned} p_0 &= -\frac{\sin^2 \gamma}{a} \\ q_0 &= 0 \\ r_0 &= \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{a} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Eulerove uhly sú definované následovne:

- Θ je uhol, ktorý tvorí os w s pevnou osou z ,
- Φ je uhol medzi rovinami zw a uw a

- Ψ je uhol medzi pevnou rovinou xz a rovinou zw .

Zložky krivosti a otočenia môžu byť popísané pomocou (1.3), kde $\Theta' = d\Theta/ds$, atď. a s je oblúk dĺžky OP .

$$\begin{aligned} p_1 &= \Theta' \sin \Phi - \Psi' \sin \Theta \cos \Phi \\ q_1 &= \Theta' \cos \Phi + \Psi' \sin \Theta \sin \Phi \\ r_1 &= \Phi' + \Psi' \cos \Theta \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ďalšími matematickými úpravami rovníc (presný postup viď [4]) vyjadrili autori rovnice rovnováhy (1.4) a (1.5), kde bodky označujú odlišnosť s rešpektom k t .

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= \sin \Psi (m_x + f_2 z + f_1 y) + f_1 x \cos \Psi - \Pi \sin \gamma \sin \Phi \\ \dot{\Phi} &= \{-\cos^2 \Theta \cos \Psi (m_x + f_2 z + f_1 y) + f_1 x \cos^2 \Theta \sin \Psi - \cos \Theta \sin \Theta (f_2 x - m_z) - \\ &\quad - \Pi \sin \gamma \cos \Phi \cos \Theta - N \sin^2 \Theta \cos \Psi (m_x + f_2 z + f_1 y) + N f_1 x \sin^2 \Theta \sin \Psi + \\ &\quad + N \sin \Theta \cos \Theta (f_2 x - m_z) + \Pi \sin \Theta \cos \gamma\} / \sin \Theta \\ \dot{\Psi} &= \{\cos \Psi \cos \Theta (m_x + f_2 z + f_1 y) + f_2 x \sin \Theta - f_1 x \cos \Theta \sin \Psi + \Pi \sin \gamma \cos \Phi - \\ &\quad - m_z \sin \Theta\} / \sin \Theta \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dX}{ds} = \sin \Theta \cos \Psi \\ \dot{y} &= \frac{dY}{ds} = \sin \Theta \sin \Psi \\ \dot{z} &= \frac{dZ}{ds} = \cos \Theta \end{aligned} \quad (1.5)$$

Pre vyššie popísané vyjadrenie použili autori definície (1.6), kde l je dĺžka vlákna v polovičnom závite.

$$\begin{aligned} N &= EI/C, \quad x = X/l \\ f_1 &= F_1 l^2/EI, \quad y = Y/l \\ f_2 &= F_2 l^2/EI, \quad z = Z/l \\ m_x &= M_x l/EI, \quad \Pi = l \sin \gamma/a \\ m_z &= M_z l/EI, \quad h = s/l \end{aligned} \quad (1.6)$$

Rovnice sú ďalej riešené pomocou okrajových podmienok.

Autori sledujú tiež zmeny priezeru priadze. Vychádzajú z faktu, že nedeformovaná skrutkovica má kruhový prierez, ktorý je definovaný súradnicami x a y . Keď

Priemet ohnutej skrutkovice do roviny yz je zobrazený na obr. 1.2. Nechajme bod B aby bol nejakým bodom na deformovanej skrutkovici ktorého súradnice sú x_B , y_B , z_B . Z integrácie rovníc rovnováhy sú tieto súradnice známe. Potrebujeme najšť vzdialenosť OC , ktorá nám udá y súradnicu prierezu ohnutej skrutkovice a bude značená y_C . Z obrázku sú súradnice bodu B $y_B = 0I$ a $z_B = IB$. Potom uvažujú pravouhlý trojuholník IBD (1.7), kde y_A , z_A a ϑ sú známe z predchádzajúcich výpočtov (viď [4]).

Kruhový oblúk je vedený skrz bod B so stredom v D a polomerom BD . Os y pretne v bode C , preto možno zapísať (1.8).

5

Súradnica y prierezu deformovanej skrutkovice zodpovedajúca bodu B je uvedená v rovnici (1.9).

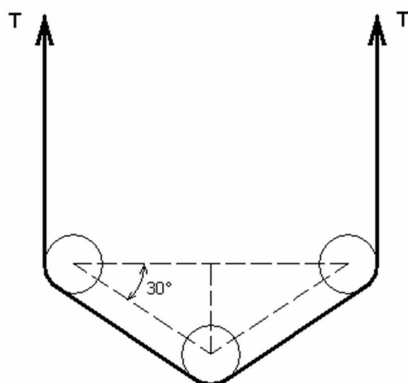
$$y_C = OC = OD - CD = z_A \cotg \vartheta + y_A - \sqrt{z_B^2 + (z_A \cotg \vartheta y_A - y_B)^2} \quad (1.9)$$

Potom prierez plochou v ktorej leží deformovaný skrutkovicový filament je tvorený súradnicami x_B , y_C (pohyb bodu B po skrutkovici z O do A).

V článku [4] je ďalej uvedené grafické zobrazenie výsledkov. Z nich je vidno, že dochádza k menšej deformácii prierezu so zvyšujúcim sa uhlom stúpania, ďalej došli autori k záveru, že pre konštantnú hodnotu N a γ zmenšenie v obidvoch charakteristických smeroch prierezu rastie keď je skrutkovica ohnutá a podrobená rastúcim tlakovým silám.

Vo všeobecnosti zmenšenie väčšieho rozmeru je oveľa menšie než zmenšenie menšieho rozmeru, okrem prípadu, keď $N = 4, 5$ a uhol stúpania je 40. Výsledky ukazujú, že stupeň deformácie prierezu rastie s N a tieto trendy sú nasledované hodnotami ohybového momentu m_x .

Experimentálne skúmali pravdivosť týchto výsledkov na zariadení, ktoré produkuje súčasnú tlakovú, ohybovú a ťahovú deformáciu priadze. Vzorky priadze upevnili priečne cez horizontálnu tyčinkovú jednotku, označenú ako trojtyčinková jednotka, ktorá obsahuje tri oceľové tyčinky s priemerom 1,76 mm fixované navzájom rovnobežné, ale umiestnené tak, že ich stredy tvoria rovnoramenný trojuholník (obr. 1.3). Táto jednotka je nasadená na ťahové testovacie zariadenie Instron, ktoré aplikuje ťah na obidva konce vzorky priadze. Zmeny v obidvoch priemeroch priadze ohnutej sú pozorované prostredníctvom posuvného mikroskopu. Deformácia spôsobená na sledovanom bode môže byť považovaná za očakávanú kombináciu ťahu, ohybu a tlaku.



Obr. 1.3: *Experimentálne zariadenie*

Nakoniec porovnali experimentálne výsledky získané zo zatočených polyesterových filamentových priadzí s numerickými výsledkami teoretického modelu.

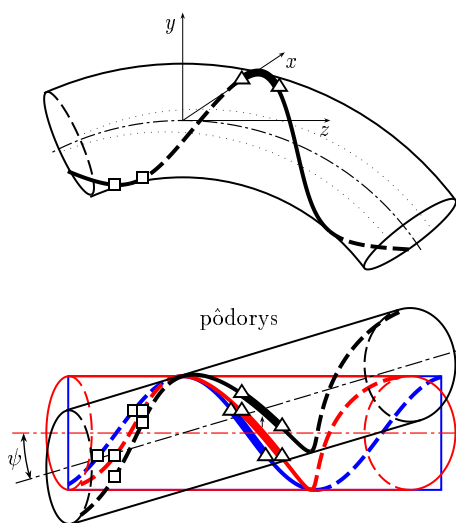
Súhlasne s výsledkami, pomer medzi ohybovou tuhosťou a torznou tuhosťou skrutkovicového filamentu má veľmi významný vplyv na zmenu vo väčšom rozmere prierezu. Ak je N malé (napr. 0,5), nedochádza k žiadnej výraznej zmene v väčšom rozmere. Inými slovami, skrutkovica deformuje len svoj menší rozmer. Skrutkovica začína deformovať svoj väčší rozmer, ak N rastie ($N = 4, 5$).

Teoretické výsledky prezradujú trendy podobné experimentálne nájdeným zo zakrútených filamentových priadzí. Akokoľvek, ďalšia práca je však potrebná na určenie deformácie viacnásobnej skrutkovice za účelom vyvinutia modelu pre deformáciu skutočnej priadze.

Výsledky z tohoto modelu nie sú porovnateľné s našimi výsledkami, pretože nami uvažovaný model nezahŕňa tlakové a ťahové sily.

1.2 Zmeny priadze pri ohybe

Ohyb priadze je sprevádzaný viacerými efektami. Niektoré vplývajú na lokálne a globálne vlastnosti nite viac, iné menej. Na zahrnutie významných efektov do výpočtov teda závisí správnosť a prijateľnosť modelu. Za predpokladu, že priadza sa pri



Obr. 1.4: Vlákna pri ohybe

ohybe správa tak ako je zobrazené na obr. 1.4, môžeme sa v tejto práci zaoberať troma najvýraznejšími efektami:

1. Mení sa tvar priečného prierezu priadze. Tvary s malým momentom zotrvačnosti vzhľadom k neutrálnej ose sú energeticky najvýhodnejšie pri ohybe, takže

predpokladáme roztiahnutie tvaru prierezu v smere neutrálnej osi a zmenšenie rozmeru kolmého na neutrálnu os. Tieto podmienky spĺňa elipsa (ako je vidno na obr. 1.5), ale je možné uvažovať aj iné tvary.



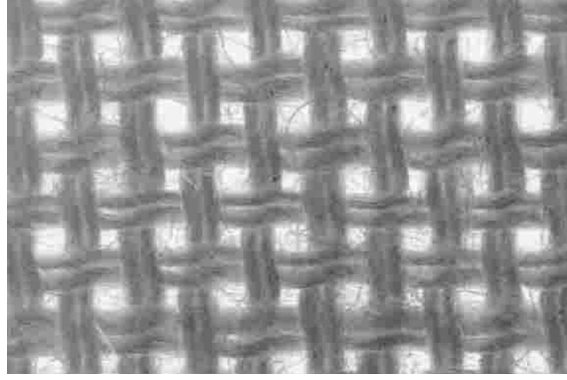
Obr. 1.5: *Prierez priadze pri ohybe*

2. Priadza mení svoju dĺžku v smere jej osi. Kruhový tvar prierezu zachováva najmenšiu možnú dĺžku vlákien na skrutkoviči danej valcovým tvarom. Ak predpokladáme zachovanie plochy prierezu (pretože vlákna vo vnútri priadze majú vlastný objem, ktorý sa prakticky nemôže meniť), potom každá zmena prierezu priadze spôsobuje predĺženie vlákien. Skrátenie priadze je teda energeticky výhodné v tejto situácii.
3. Ak ohýbame sústavu zakrútených vlákien ako je zobrazené na obr. 1.4, je možné každé vlákno rozdeliť na dve časti:
 - prvá časť, ktorá je na obrázku vymedzená trojuholníkmi, sa predlžuje,
 - druhá časť, vyznačená štvorcami, je charakteristická svojím skracovaním.

Pretože vlákna majú tendenciu zachovávať svoju dĺžku, priadza sa bude správať tak, aby bol vyššie popísaný efekt minimalizovaný. Jedna z možností je zmena smeru osi priadze, ako je zobrazené na obr. 1.4 a obr. 1.6, tj. os priadze sa vykloní z pôvodnej roviny ohybu. Takto sa môžu horné vlákna skracovať a spodné vlákna predlžovať. Ďalším riešením by mohlo byť pootočenie prierezu priadze voči ose priadze.

1.2.1 Popis zmien v priadzi

Ako už bolo uvedené v kapitole 1.2, pri ohybe dochádza k trom významným zmenám priadze. Predpokladajme, že zmeny v priadzi nevzniknú naraz ale jedna za druhou. Potom teda môžeme rozdeliť deformácie do nasledujúcich krokov.



Obr. 1.6: *Vybočenie osi priadze*

1. Ako prvú zmenu možno uviesť zmenu dĺžky priadze v smere jej osi (viď rovnice (1.10)); dĺžkový rozmer sa mení na ξ -násobok.

$$\begin{aligned}x_1 &= x \\y_1 &= y \\z_1 &= \xi z\end{aligned}\tag{1.10}$$

2. Druhou deformáciou je zmena prierezu priadze. Z pôvodného kruhového tvaru sa mení na eliptický. Jediná hodnota popisujúca polomer sa nahrádza dvoma hodnotami (polosami elipsy). Od okamihu, keď sa vlákna usporiadajú tak, že ich pohyb je obmedzený natoľko, že sa už nemôžu voľne preskupovať, sa so zmenou prierezu priadze mení aj prierez vlákien.
3. Ďalšou deformáciou je vyklonenie osi priadze z roviny xz (viď obr. 1.4) o uhol vybočenia, ktorý označíme ako ψ (viď rovnice (1.11)).

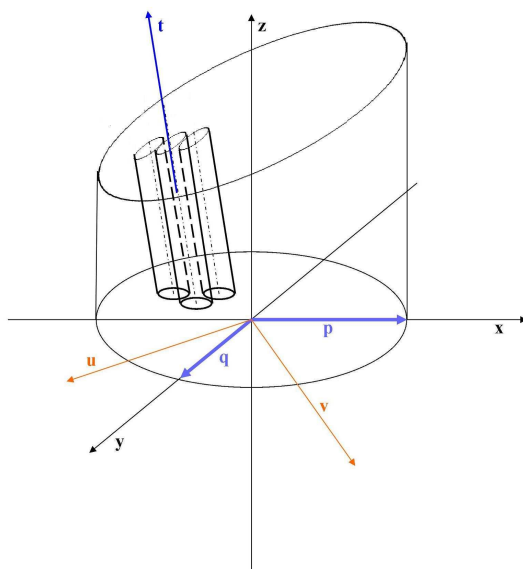
$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + z_1 \operatorname{tg} \psi = x + \xi z \operatorname{tg} \psi \\y_2 &= y_1 = y \\z_2 &= z_1 = \xi z\end{aligned}\tag{1.11}$$

4. Posledným krokom je samotný ohyb, ktorý je popísaný rovnicami (1.12). Os ohybu je umiestnená v rovine xy a je rovnobežná s osou x .

$$\begin{aligned}x_3 &= x_2 = x + \xi z \operatorname{tg} \psi \\y_3 &= y_2 \cos \frac{z_2}{R} - R + R \cos \frac{z_2}{R} = (R + y) \cos \frac{\xi z}{R} - R \\z_3 &= y_2 \sin \frac{z_2}{R} + R \sin \frac{z_2}{R} = (R + y) \sin \frac{\xi z}{R}\end{aligned}\tag{1.12}$$

1.2.2 Popis zmien prierezu priadze

Samotný popis zmeny priezu priadze nie je komplikovaný. Problém nastáva, keď do výpočtov chceme zahrnúť aj zmeny priezu vlákien. Reálne pozorujeme zmeny priezu priadze a vlákien v rovine kolmej na os priadze (??), kde je prierez vlákien deformovaný šikmým rezom. Na výpočty máme k dispozícii práve tieto hodnoty. Potrebujeme preto nájsť taký vzťah medzi šikmým a kolmým rezom priadzou, aby sme mohli čo najjednoduchšie popísať zmenu prierezu vlákien.

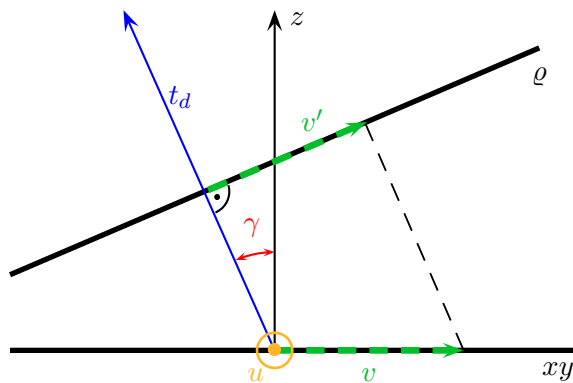


Obr. 1.7: Kolmý a šikmý rez priadzou

Najprv si zavedme nový pravouhlý súradnicový systém uv v rovine xy (rovina rezu kolmého na priadzu), ako je zobrazené na ???. Tento súradnicový systém bude spĺňať ešte jednu podmienku a to takú, že os u bude kolmá na vektor t_d (dotyčnicový vektor k smeru osi vlákna). Týmto bude zabezpečený vzťah s konkrétnym miestom na vlákne a zjednoduší sa hľadanie vzťahov medzi popisujúcimi veličinami.

Z obr. 1.8 vyplýva vzájomný vzťah medzi rovinou ϱ (rovina rezu kolmého na vlákna) a rovinou xy (rovina rezu kolmo na priadzu). Rovina ϱ a dotyčnicový vektor t_d sú na seba navzájom kolmé, čo vyplýva z definície kolmého a šikmého rezu. Tým sa dosiahne to, že vektor u sa do roviny ϱ premietne v nezmenenej veľkosti, veľkosť vektora v v rovine ϱ bude podľa vzťahu (1.13)

$$\begin{aligned} u' &= u \\ v' &= v \cos \gamma, \end{aligned} \tag{1.13}$$



Obr. 1.8: *Priemet vektora v do roviny ρ*

kde γ je uhol, ktorý zvierá vlákno s osou priadze a možno ho zapísať pomocou rovnice (1.14).

$$\cos \gamma = \frac{t_3}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}} \quad (1.14)$$

Hodnoty t_1 , t_2 a t_3 sú zložky dotyčnicového vektora ku vláknu (v súradnicovom systéme xyz).

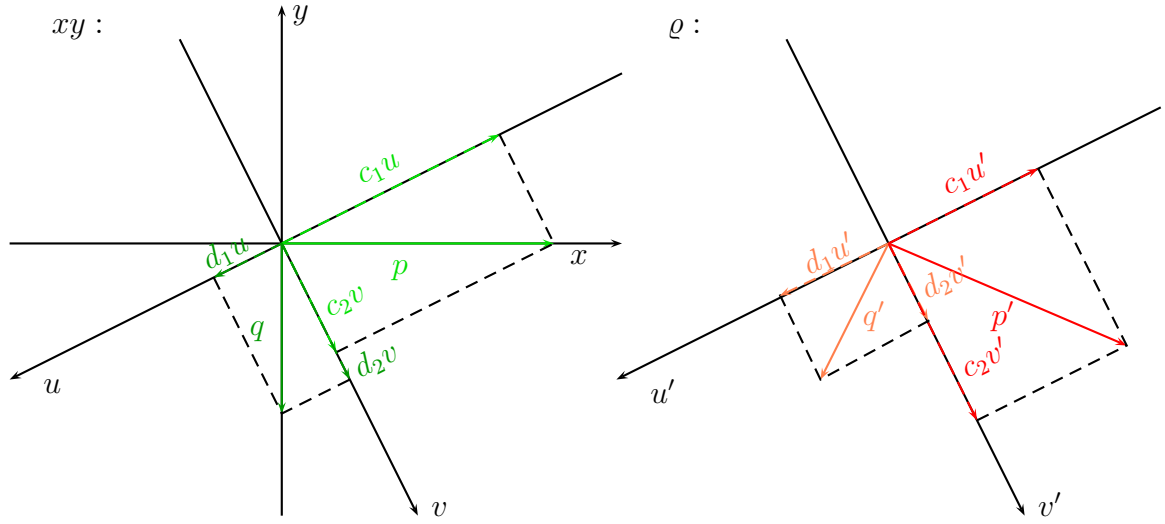
Aby sme mohli určiť rozmery elipsy popisujúcej tvar prierezu v rovine ρ , musíme nájsť vzťah, ktorý prevedie elipsu z roviny xy do roviny ρ . Na riešenie tejto úlohy boli použité 2 známe fakty:

1. *vzťah medzi polosami elipsy (charakteristickými rozmermi priadze) p , q a ich priemetmi do roviny ρ*
2. *vzťah medzi plochami elíps v rovine ρ a rovine xy*

Polosi a ich priemet

Z geometrie podľa obr. 1.9 vyplývajú vzťahy (1.15):

$$\begin{aligned} p &= c_1 u + c_2 v \\ q &= d_1 u + d_2 v \\ p' &= c_1 u' + c_2 v' \\ q' &= d_1 u' + d_2 v' \end{aligned} \quad (1.15)$$



Obr. 1.9: *Priemety polos elipsy v rovine xy a ρ*

Po úpravách podľa zavedených zjednodušení (1.13) potom môžeme zapísať (1.16):

$$\begin{aligned}
 p &= c_1 u + c_2 v, \\
 q &= d_1 u + d_2 v, \\
 p' &= c_1 u + c_2 v \cos \gamma, \\
 q' &= d_1 u + d_2 v \cos \gamma.
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

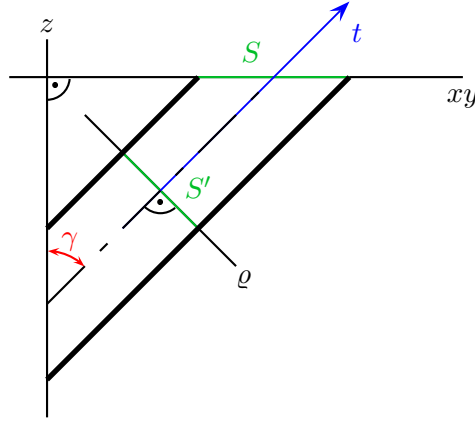
Tieto štyri rovnice riešime za predpokladu, že vektory u, v sú jednotkové. Vypočítame teda konštanty c_1, c_2, d_1, d_2 ako je uvedené v (1.17). Toto vyjadrenie budeme potrebovať pri ďalšom riešení.

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -\frac{pt_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} \\
 c_2 &= \frac{pt_1}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} \\
 d_1 &= \frac{qt_1}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} \\
 d_2 &= \frac{qt_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}}
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Plochy elíps

Plocha elipsy sa počíta, ako je uvedené v [1], podľa vzťahu (1.18), kde p, q sú polosi elipsy.

$$S = \pi pq \tag{1.18}$$



Obr. 1.10: Šikmý a kolmý rez

V rovine xy je možné vypočítať plochu takýmto spôsobom, ale v rovine ϱ nepoznáme hodnoty polos e , f . Vieme však podľa Neckáře [7] zistiť veľkosť plochy elipsy danej týmito polosami v rovine ϱ (viď obr. 1.10). Získame vzťahy (1.19) a (1.20).

$$S' = \pi e f \quad (1.19)$$

$$S = \frac{S'}{\cos \gamma} \quad (1.20)$$

Po dosadení možno zapísať vzťah v tvare (1.21), v ktorom máme 2 neznáme. Potrebujeme teda ešte jednu rovnicu.

$$pq \cos \gamma = e f \quad (1.21)$$

Tú odvodíme zo všeobecnej rovnice elipsy podľa vzťahu (1.22), ktoré uvádza Eliaš v [3].

$$ku'^2 + lu'v' + mv'^2 - 1 = 0 \quad (1.22)$$

Postupom uvedeným v [3] môžeme pre veľkosti polos e , f zapísať rovnice (1.23)

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{\frac{2}{k+m+\sqrt{(k+m)^2-4km+l^2}}} \\ f &= \sqrt{\frac{2}{k+m-\sqrt{(k+m)^2-4km+l^2}}} \end{aligned} \quad (1.23)$$

a po dosadení do (1.21) dostávame pomerne jednoduchú rovnicu (1.24).

$$\frac{4}{p^2 q^2 \cos^2 \gamma} = 4km - l^2 \quad (1.24)$$

V tejto chvíli dochádza znova ku komplikáciám. Vystupujú tu totiž nové neznáme k , l , m . Problém vyriešime tak, že použijeme rovnice (1.16) a (1.17). Za u' a v' dosadíme do vzťahu (1.22) súradnice vektorov p' , q' . Pripomeňme, že tieto výpočty robíme v rovine ϱ , ktorá je popísaná súradnicami u' a v' .

Týmto postupom sa prepracujeme k hodnotám k , l , m (viď (1.25)).

$$\begin{aligned} k &= \frac{p^2 t_1^2 + q^2 t_2^2}{p^2 q^2 (t_1^2 + t_2^2)} \\ l &= \frac{2 t_1 t_2 (p^2 - q^2)}{p^2 q^2 (t_1^2 + t_2^2) \cos \gamma} \\ m &= \frac{p^2 t_2^2 + q^2 t_1^2}{p^2 q^2 (t_1^2 + t_2^2) \cos \gamma^2} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Dosadením do rovníc (1.23) získame veľkosti polos elipsy v rovine ϱ popísané pomocou údajov známych z rezu kolmého na os priadze a závislé na dotyčnicovom vektore ku vláknu (1.26).

$$\begin{aligned} e &= \frac{2pq \cos \gamma \sqrt{t_1^2 + t_2^2}}{\sqrt{t_1^2 (p \cos \gamma - q)^2 + t_2^2 (p - q \cos \gamma)^2} + \sqrt{t_1^2 (p \cos \gamma + q)^2 + t_2^2 (p + q \cos \gamma)^2}} \\ f &= \frac{2pq \cos \gamma \sqrt{t_1^2 + t_2^2}}{\sqrt{t_1^2 (p \cos \gamma - q)^2 + t_2^2 (p - q \cos \gamma)^2} - \sqrt{t_1^2 (p \cos \gamma + q)^2 + t_2^2 (p + q \cos \gamma)^2}} \end{aligned} \quad (1.26)$$

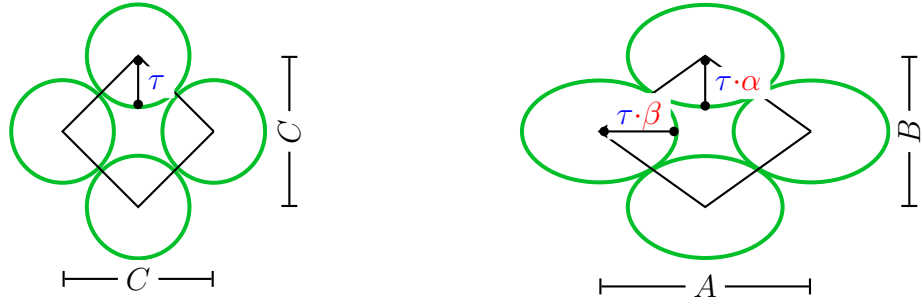
Výsledkom je teda popis priemetu elipsy (získanej kolmým rezom priadzou) do roviny, v ktorej je prierez vlákien kruhový, čiže môžeme ďalej študovať zmeny ich prierezu.

1.2.3 Popis zmien prierezu vlákien

Ako už bolo uvedné, pri ohybe sa nemení len prierez priadze, ale aj prierez jednotlivých vlákien. Dochádza k tomu až v okamihu, keď sa zmení štruktúra ohýbanej priadze natolko, že už nemôže dochádzať k migrácii vlákien a vzniká kontakt vlákien.

Z pôvodne náhodného rozloženia vlákien v priadzi tak môže vzniknúť pravidelné usporiadanie blízke štvorcovej štruktúre (viď obr. 1.11), s ktorou v tejto práci pri výpočtoch počítame (samozrejme, zmeny môžu viesť aj na iné štruktúry, napr. hexagonálnu).

Ak potom takúto jednu štruktúrnu bunku ďalej stláčame, ako je zobrazené na obr. 1.11, môžeme zapísať rovnicu (1.27). A a B sú označenia veľkostí bunky, τ je polomer vlákna pred deformáciou a α a β sú parametre popisujúce zmeny



Obr. 1.11: Štruktúrálna bunka pred deformáciou a po deformácii

priečného rezu vlákna, pričom predpokladáme pôvodný kruhový tvar vlákna, a ten sa pravdepodobne bude meniť na eliptický tvar (vyplýva to z energetickej výhodnosti vid' kapitola 1.2.1).

$$\left(\frac{A}{4\tau\beta}\right)^2 + \left(\frac{B}{4\tau\alpha}\right)^2 = 1 \quad (1.27)$$

O zmenách prebiehajúcich v tejto bunke máme ešte jednu informáciu a to o energii (1.28), ktorá je spotrebovaná na zmenu tvaru vlákna podľa [2]. E_1 , E_3 a ν_{12} , ν_{13} sú parametre materiálu a ε je pomerné predĺženie vlákien.

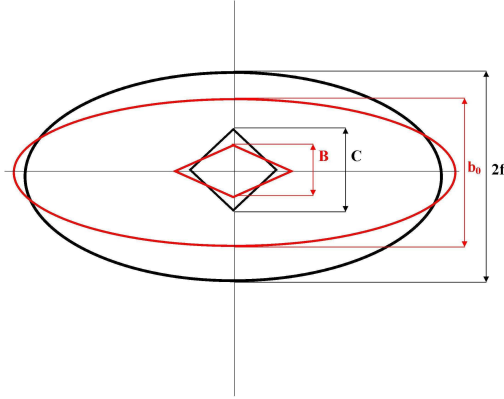
$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2}E_1[(\alpha + \beta - 2)^2 - 2(1 - \nu_{12})(\alpha - 1)(\beta - 1)] + \\ & + \sqrt{E_1E_3}\nu_{13}(\alpha + \beta - 2)\varepsilon + \frac{1}{2}E_3\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (1.28)$$

Z týchto dvoch rovníc môžeme vhodnými matematickými postupmi (vid' kapitola 1.5.4) vypočítať optimálne hodnoty α a β .

1.2.4 Popis vzťahu medzi prierezom priadze a prierezom vlákien

Na to, aby sme mohli určiť hodnoty α a β z rovníc uvedeých v kapitole 1.2.3, potrebujeme poznať rozmery štruktúrálnej bunky A a B . Vyjdeme z úvahy, že veľkosť štruktúrálnej bunky sa mení v rovnakom pomere ako rozmer priadze.

V medznom stave, tj. keď dôjde k dotyku všetkých vlákien, má priadza rozmery a_0 a b_0 (vid' obr. 1.12). Hodnota C je rozmer štruktúrálnej bunky v medznom stave (obr. 1.11), to znamená, že jeho veľkosť možno vyjadriť pomocou polomeru vlákna



Obr. 1.12: Vzťah medzi štruktúrnou bunkou a prierezom priadze

ako je uvedené v (1.29).

$$C = 2\sqrt{2}\tau(1 - \sigma\varepsilon) \quad (1.29)$$

Výraz $(1 - \sigma\varepsilon)$ zahŕňa v sebe zmeny prierezu vlákna v závislosti na namáhaní. Poissonov pomer, označený ako σ popisuje pomer medzi priečnym skrútením a pozdĺžnym predĺžením [5]. Matematicky ho môžeme vyjadriť pomocou rovnice (1.30).

$$\sigma = \frac{\sqrt{E_1 E_3} \nu_{13}}{E_1(1 + \nu_{12})} \quad (1.30)$$

Vráťme sa však naspäť k problému. Ako vyplýva z obr. 1.12, rozmer $2f$ (f je polos elipsy z rovnice (1.26)) sa pri ohýbaní postupne znižuje z priemeru priadze až na hodnotu b_0 , pri ktorej dochádza ku kontaktu všetkých vlákien. Ak ohýbame priadzu ďalej, hodnota $2f$ sa ďalej znižuje. Spolu s touto hodnotou sa bude znižovať aj štruktúrna bunka, t.j. z pôvodného rozmeru C sa znižuje na rozmer označený ako B .

$$\begin{aligned} \frac{b_0}{2f} &= \frac{C}{B} \\ \frac{a_0}{2e} &= \frac{C}{A} \end{aligned} \quad (1.31)$$

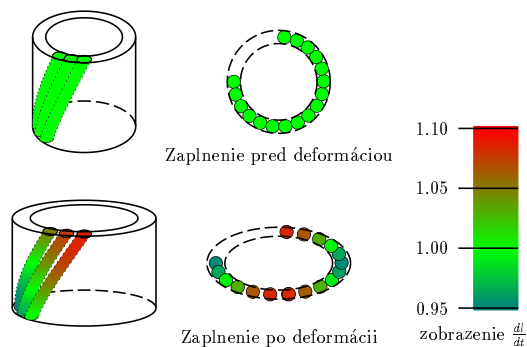
Vzťah medzi týmito zmenami môžeme popísať ako je uvedené v (1.31). Slovné to možno vyjadriť tak, že pomer, v ktorom sa mení priadza je rovný pomeru, v ktorom sa mení štruktúrna bunka. Vyššie popísané platí aj pre druhý rozmer prierezu (viď (1.31)).

1.3 Optimalizácia popisu

Ak uvažujeme, že pri ohybe priadze sa zmení prierez na epliptický podľa vzťahov (1.32), stráca sa energetická výhodnosť popisu.

$$\begin{aligned}x &= p \cos t \\y &= q \sin t \\z &= bt\end{aligned}\tag{1.32}$$

Parameter t prestáva byť konštantným násobkom prirodzeného parametru krivky popisujúcej vlákno a to preto, že pomerné predĺženie $\frac{dl}{dt}$ je nekonštantné, ako je vidno na obr. 1.13. Na druhej strane je však samotná krivka zvolená vhodne, pretože objemové zaplnenie priadze vláknami je rovnomerné. V mieste, kde sa rozmer prierezu zmenšuje, sa vlákna oddiaľujú tak, že medzi nimi zostáva prázdne miesto a v oblasti, kde sa rozmer zväčšuje sa hromadí väčšie množstvo vlákien a celkovo sa potom obidva efekty kompenzujú (viď obr. 1.13).



Obr. 1.13: Rozloženie vlákien pred a po deformácii prierezu

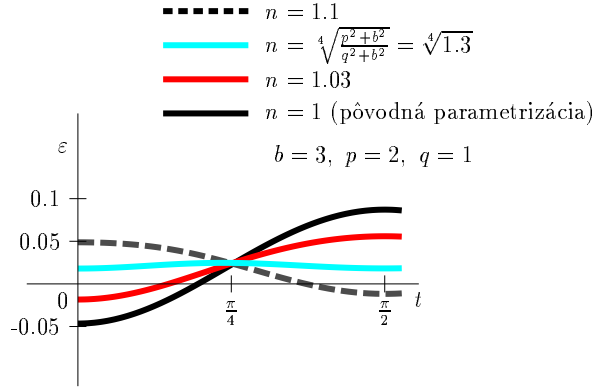
Je teda potrebné nájsť takú závislosť, aby sa obmedzil vyššie popísaný efekt. Jedným z možných návrhov je zavedenie nového parametra t^* , ako je uvedené v rovniciach (1.33).

$$\begin{aligned}x &= p \cos t^* \\y &= q \sin t^* \\z &= bt^*\end{aligned}\tag{1.33}$$

Možností, akú hodnotu t^* zvoliť je viacero, ale voľba (1.34) sa zdá byť vyhovujúca.

$$\operatorname{tg} t^* = n \operatorname{tg} t \quad (1.34)$$

Výhodnosť tohoto zápisu vyplýva z obr. 1.14. Použitie závislosti (1.35) je najvhodnejšie, pretože jednak zachováva objem vlákien a závislosť predĺženia vlákien na parametri t je veľmi blízka konštantnej hodnote. Ak započítame aj skrátenie osi priadze ξ , pomerné predĺženie sa bude blížiť 1 pre všetky hodnoty t .



Obr. 1.14: Závislosť pomerného predĺženia na polohe na skrutkovici

$$n = \sqrt[4]{\frac{p^2 + b^2}{q^2 + b^2}} \quad (1.35)$$

Parameter t môže byť teda znova využitý ako prirodzený parameter skrutkovice.

1.4 Použité modely priadze

Najznámejší a najpoužívanější model priadze je skrutkovicový model. Parametricky ho môžeme popísať pomocou rovnice (1.36). Závit jedného vlákna je daný polomerom a a redukovanou výškou b . Kompletný závit je popísaný parametrom t z intervalu od 0 do 2π .

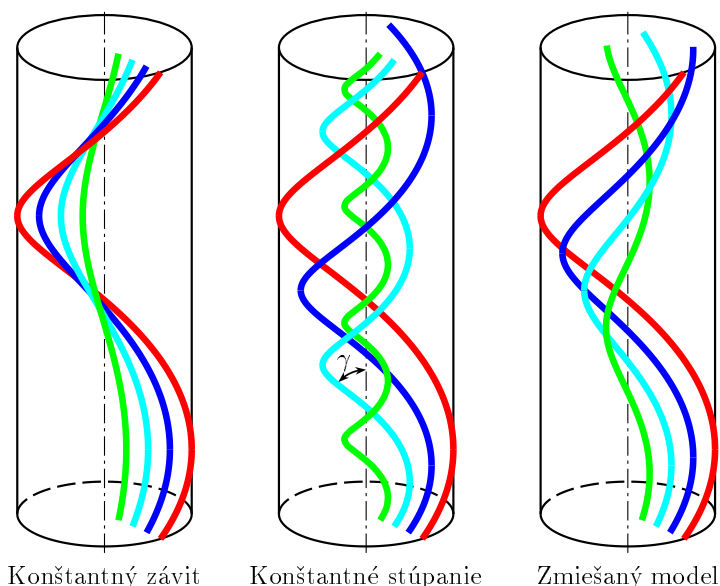
$$\begin{aligned} x &= a \cos(t + \varphi) \\ y &= a \sin(t + \varphi) \\ z &= bt \end{aligned} \quad (1.36)$$

Ďalej budeme skúmať správanie sa priadze pri zovšeobecnení ideálneho skrut-

kovicového modelu priadze. Tento model je charakteristický lineárnou závislosťou tangenty uhla stúpania γ (viď obr. 1.15) na parametri skrutkovice a podľa vzťahu (1.37). Uhol stúpania vlákien na povrchu priadze je označený ako γ_r , r je polomer priadze a j je konštantný paramater z intervalu od 0 do 1.

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \gamma_r \left(j \frac{a}{r} + 1 - j \right) \quad (1.37)$$

Pre $j = 0$ dostaneme model s konštantným stúpaním (viď obr. 1.15), čo znamená, že uhol γ je nezávisle na vzdialenosti od stredu priadze rovnaký. Hodnota $j = 1$ vedie na model s konštantným závitom, ktorý možno charakterizovať ako model s konštantným počtom závitov na určitú dĺžku nezávisle na vzdialenosti od stredu priadze.



Obr. 1.15: *Modely priadze*

Skutočné, merateľné výsledky vyhovujú rovnici (1.37), zväčša však nejde o krajné riešenia ($j = 0$, $j = 1$), ale o hodnoty z vyššie spomenutého intervalu pre j (viď tretí zovšeobecnený model na obr. 1.15).

1.5 Deformačná energia

1.5.1 Popis priadze po deformácii

Základný popis deformácií, ku ktorým dochádza pri ohybe priadze je uvedený v kapitole 1.2.1. Po použití parametrizácie (1.36) a po optimalizácii uvedenej v kapitole

1.3 môžeme konečné zmeny priadze popísať vzťahmi (1.38).

$$\begin{aligned}
x_3 &= p \cos [\arctan (n \operatorname{tg} t)] + \xi b \arctan (n \operatorname{tg} t) \operatorname{tg} \psi \\
y_3 &= (R + q \sin [\arctan (n \operatorname{tg} t)]) \cos \frac{\xi b \arctan (n \operatorname{tg} t)}{R} - R \\
z_3 &= (R + q \sin [\arctan (n \operatorname{tg} t)]) \sin \frac{\xi b \arctan (n \operatorname{tg} t)}{R}
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Dotyčnicový vektor ku vláknu môžeme vyjadriť pomocou (1.39).

$$\begin{aligned}
t_1 &= n \frac{1 + \operatorname{tg}^2 t}{1 + n^2 \operatorname{tg}^2 t} (\xi b \operatorname{tg} \psi - p \sin [\arctan (n \operatorname{tg} t)]) \\
t_2 &= n \frac{1 + \operatorname{tg}^2 t}{1 + n^2 \operatorname{tg}^2 t} \left(q \cos [\arctan (n \operatorname{tg} t)] \cos \frac{\xi b \arctan (n \operatorname{tg} t)}{R} - \right. \\
&\quad \left. - (R + q \sin [\arctan (n \operatorname{tg} t)]) \sin \frac{\xi b \arctan (n \operatorname{tg} t)}{R} \frac{\xi b}{R} \right) \\
t_3 &= n \frac{1 + \operatorname{tg}^2 t}{1 + n^2 \operatorname{tg}^2 t} \left(q \cos [\arctan (n \operatorname{tg} t)] \sin \frac{\xi b \arctan (n \operatorname{tg} t)}{R} + \right. \\
&\quad \left. + (R + q \sin [\arctan (n \operatorname{tg} t)]) \cos \frac{\xi b \arctan (n \operatorname{tg} t)}{R} \frac{\xi b}{R} \right)
\end{aligned} \tag{1.39}$$

1.5.2 Pomerné predĺženie priadze

Pomerné predĺženie deformovanej krivky danej parametrom t zapíšeme pomocou všeobecne známeho vzťahu (1.40), kde dl_0 (1.41) je popis zmeny dĺžky pred deformáciou (vyplýva zo základného modelu podľa (1.36)) a dl (1.42) je zmena dĺžky po deformácii (vyplýva z rovníc (1.38)).

$$\varepsilon = \frac{dl}{dl_0} - 1 \tag{1.40}$$

$$\frac{dl_0}{dt} = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1.41}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dl}{dt} &= n \frac{1 + \operatorname{tg}^2 t}{1 + n^2 \operatorname{tg}^2 t} [(\xi b \operatorname{tg} \psi - p \sin [\arctan (n \operatorname{tg} t)])^2 + \\
&\quad + q^2 \cos^2 [\arctan (n \operatorname{tg} t)] + (R + q \sin [\arctan (n \operatorname{tg} t)])^2 \frac{\xi^2 b^2}{R^2}]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{1.42}$$

1.5.3 Hustota deformačnej energie

Pružné teleso podľa [10] akumuluje pri deformovaní energiu vynakladanú na deformáciu. Deformačná energia W je v pružných telesách uchovávaná tak dlho, dokiaľ sa teleso neodľahčí.

Keď sú deformácie malé, je lineárna hustota deformačnej energie w vlákna daná vzťahom (1.43), kde K je ťahová tuhosť vlákna a ε je pomerné predĺženie vlákna.

$$w = \frac{1}{2}K\varepsilon^2 \quad (1.43)$$

Celková deformačná energia jedného závitú vlákna je daná integrálom (1.44) skrz celú dĺžku závitú. Môžeme vyjadriť aj závislosť na parametri t a to dosadením za dl z rovnice (1.42).

$$W_z = \int_{závit} w dl \quad (1.44)$$

Keď poznáme deformačnú energiu jedného závitú vlákna, môžeme jednoducho odvodiť vzťah pre deformačnú energiu celého systému obsahujúceho n vlákien (1.45).

$$W = nW_z \frac{L}{2\pi b} \quad (1.45)$$

Výraz $\frac{L}{2\pi b}$ popisuje počet závitov 1 vlákna v dĺžke L .

Celková energia sústavy vlákien je však tejto hodnote (1.45) rovná len dovtedy, kým nedôjde k dotyku vlákien a od toho okamihu sa pri ďalšom ohýbaní k tejto energii pripočítava aj energia (1.28) spotrebovaná na zmenu prierezu vlákien.

1.5.4 Optimalizácia parametrov

Pre nájdenie optimálnych hodnôt popisujúcich parametrov– ξ , ψ , p , q , κ (a pre zistenie hodnôt α , β prakticky tiež) možno vyjsť z úvahy, že ohýbaná sústava sa snaží dostať do energeticky najvýhodnejšieho stavu, tj. do stavu s najmenšou energiou. Vyplýva to z vety o minime deformačnej práce [10], ktorá vyjadruje, že deformačná energia W , ako funkcia neznámych reakcií dosahuje minimum pre skutočné hodnoty reakcií. Každá iná veľkosť reakcií nedáva funkcii minimum.

Z matematického hľadiska možno minimum funkcie zistiť z faktu, že derivácia tejto funkcie je v minime rovná nule.

Na výpočet je možné použiť Newton- Raphsonovu metódu [9]. Táto metóda patrí medzi numerické spôsoby hľadania koreňov rovníc. Jej princíp spočíva v tom, že v blízkosti hľadaného koreňa nahradíme graf funkcie jeho dotyčnicou a zistíme priesečník dotyčnice s osou x . Pre tento bod vypočítame hodnotu funkcie a znova

zistíme priesečník dotyčnice krivky v tomto bode s osou (1.46).

$$x_n = x_{n-1} - \frac{g(x_{n-1})}{g'(x_{n-1})} \quad (1.46)$$

Tento postup opakujeme, kým sa rozdiel medzi dvoma po sebe nasledujúcimi hodnotami prestane líšiť viac ako je požadované. Získame tak zdola obmedzenú postupnosť, ktorá sa blíži k hľadanému koreňu rovnice.

Pri hľadaní extrému (minima) môžeme rovnicu prepísať na tvar (1.47). Postup výpočtu sa nemení.

$$x_n = x_{n-1} - \frac{g'(x_{n-1})}{g''(x_{n-1})} \quad (1.47)$$

Podobne by sme mohli zapísať aj maticový tvar pre sústavy rovníc.

1.6 Ohybová tuhosť

Tuhosť v ohybe je odolnosť textílie voči ohýbaniu a to nielen vlastnou váhou ale i pôsobením vonkajšej sily [11].

U jednorozmerných textílií určuje Hookeov zákon len dva druhy modulov pružnosti: modul pružnosti v ťahu a modul pružnosti v smyku. Neexistuje modul pružnosti v ohybe, a proto sa ohybové vlastnosti textílií vyjadrujú prostredníctvom ohybovej tuhosti EI , kde E je Youngov modul pružnosti v ťahu alebo tlaku a I je moment zotrvačnosti prierezu skúmanej vzorky textílie. Tým môže byť niť, priadza, vlákno, ale tiež plošná textília.

Pre určenie ohybovej tuhosti je nutné poznať parametre popisujúce stav ohýbaného média. V prvom rade je to krivosť κ , pri ktorej je priadza ohnutá [10]. Definuje sa ako prevrátená hodnota polomeru krivosti R (viď (1.48)).

$$\kappa = \frac{1}{R} \quad (1.48)$$

Pre naše výpočty možno definovať ešte pomernú krivosť κ_r , ktorá popisuje pomer medzi polomerom priadze r a polomerom krivosti ohybu (1.49).

$$\kappa_r = \frac{r}{R} \quad (1.49)$$

Jej význam spočíva v tom, že do krivosti sa premietne vplyv priemeru priadze, čím sa pri modelovaní zabráni fyzicky nereálnemu ohybu (priadzu nemožno ohnúť viac ako je jej polomer), tj. pomerná krivosť nemôže byť väčšia ako 1.

Ďalšou veličinou tesne súvisejúcou s ohybom je ohybový moment M . Stríž [10] udáva vzťah medzi krivosťou, momentom a ohybovou tuhosťou, ako je uvedené v rovnici (1.50).

$$\kappa = \frac{M}{EI} \quad (1.50)$$

Deformačnú energiu ohýbaného nosníka môžeme vyjadriť podľa [10] ako integrál (1.51).

$$W = \int_0^l \frac{M^2(x)dx}{2EI} \quad (1.51)$$

Dosadením za moment z (1.50) do tejto rovnice a za predpokladu, že uvažujeme jednotkovú dĺžku, získame ďalším upravovaním vzťah (1.52).

$$M = \frac{dW}{d\kappa} \quad (1.52)$$

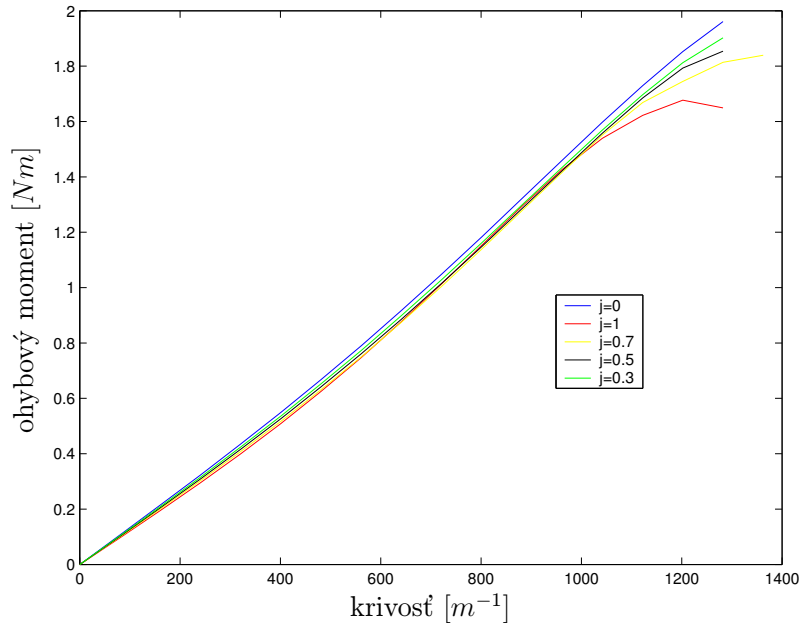
Ak do tejto rovnice dosadíme vzťah pre moment z rovnice (1.50), dostaneme výraz (1.53).

$$EI = \frac{d^2W}{d\kappa^2} \quad (1.53)$$

Význam tohoto vzťahu spočíva v tom, že dokážeme vypočítať ohybovú tuhosť a potom ju môžeme porovnať so skutočne nameranými hodnotami.

1.7 Výsledky

Simulácia bola urobená so vstupmi uvedenými v praktickej časti, aby mohli byť porovnané výsledky pre ohybovú tuhosť. V grafoch je zobrazená závislosť pre rôzne uhly stúpania popísané parametrom j . Viac o parametri j v kapitole 1.4. Z prvého



Obr. 1.16: *Závislosť ohybového momentu na krivosti*

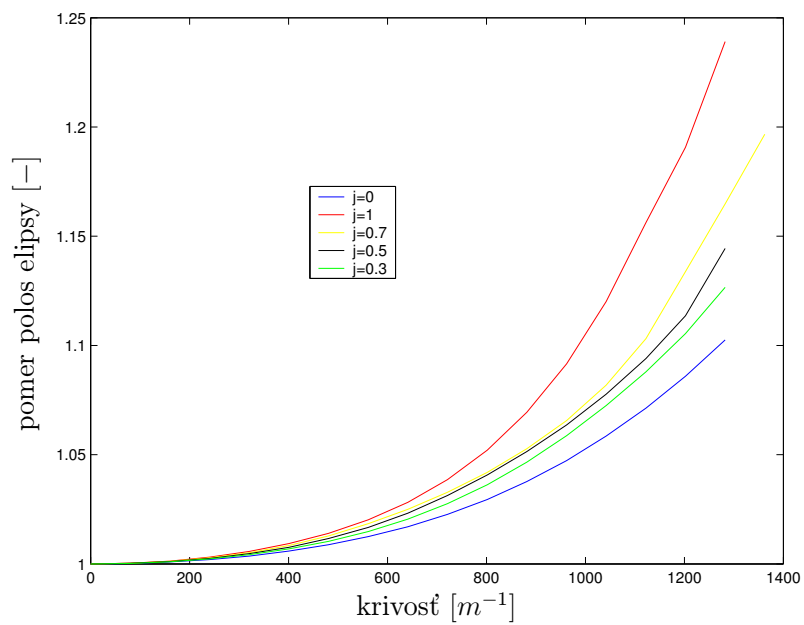
grafu na obr. 1.16 vyplýva, že ohybový moment pri menších krivostiach takmer vôbec nezávisí na uhle stúpania.

V druhom prípade vyplýva z grafu na obr. 1.17, že zmena pomeru polos elipsy popisujúcej tvar prierezu priaze sa s krivosťou zväčšuje najrýchlejšie pre model s konštantným závitom ($j = 1$) a najpomalšie rastie pre model s konštantným stúpaním ($j = 0$). Tretí graf zobrazený na obr. 1.18 popisuje závislosti uhlov vybočenia na krivosti. Z tohoto grafu vyplýva, že najvýraznejšie je vybočenie u modelu s konštantným závitom a najmenej výrazné pre model s konštantným stúpaním. Záporné hodnoty uhlov znamenajú vybočenie na opačnú stranu ako bolo pôvodne zavedené.

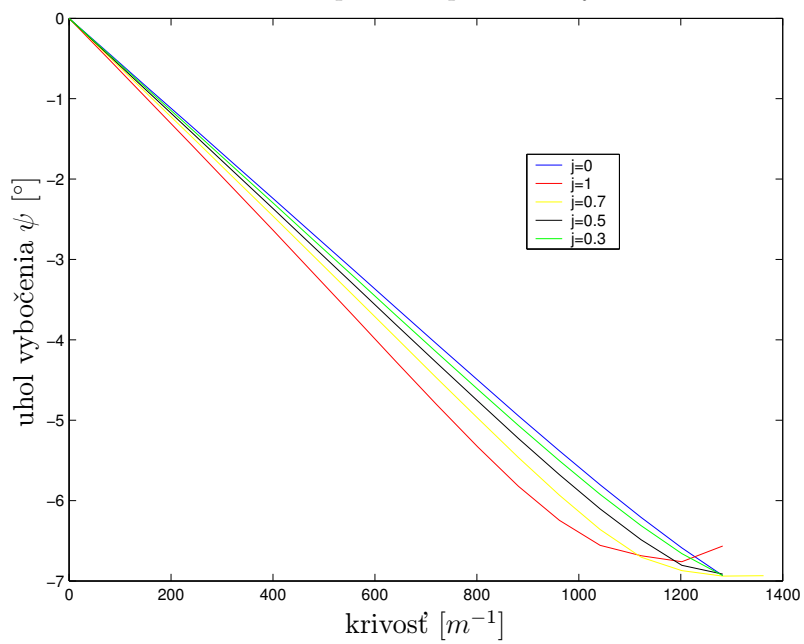
Hodnoty ohybovej tuhosti boli dané simuláciou na hodnoty uvedené v tab. 1.1.

parameter $j[-]$	ohybová tuhosť $[mNm^2]$
0	1,329
0,3	1,294
0,5	1,268
0,7	1,241
1	1,203

Tab. 1.1: *Hodnoty ohybových tuhostí z modelov*



Obr. 1.17: Závislosť pomeru polos e a f na krivosti



Obr. 1.18: Závislosť vybočenia osi priadze ψ na krivosti

Kapitola 2

Praktická časť

2.1 Cieľ praktickej časti

Cieľom praktickej časti práce je získanie potrebných vstupných dát do modelu, porovnanie nameraných a vypočítaných ohybových tuhostí a vyhodnotenie vplyvu ohybu priadzi na geometriu tkanín.

2.2 Vstupné dáta

Meranie je urobené na priadzi, z ktorej sú k dispozícii aj vzorky tkanín. Jedná sa o bavlnenú jednoduchú rotorovú priadzu o jemnosti 33tex .

2.2.1 Youngov modul pružnosti

Jedným zo vstupov do modelu je Youngov modul pružnosti v ťahu pre daný materiál, z ktorého je priadza vyrobená. Túto hodnotu môžeme nájsť v literatúre, napr. [6] alebo [5].

Pre naše modelovanie bola táto hodnota stanovená podľa [6] na $7,7\text{kN/mm}^2$.

2.2.2 Poissonov pomer

Poissonov pomer (pre materiál, z ktorého je priadza vyrobená) je definovaný v kapitole 1.2.4 a je rovnako ako modul pružnosti jedným zo vstupných parametrov modelu. Jeho hodnotu pre niektoré materiály možno nájsť v literatúre, napr. [6] alebo [5].

Keďže hodnotu pre bavlnu [6] neuvádza, bola veľkosť Poissonovho pomeru v našom prípade odhadnutá zo vzťahu (2.1) podľa [5], kde G je smykový modul (uvedený

v [6]), Y je Youngov modul pružnosti a σ je hľadaný Poissonov pomer. Táto hodnota bola teda odhadnutá na 0,425.

$$G = \frac{Y}{2(1 + 2\sigma)} \quad (2.1)$$

2.2.3 Priemer priadze

Priemer priadze možno merať dvoma spôsobmi a to z priečných rezov podľa Internej normy Výskumného centra Textil č. 22–103–01/01 alebo z pozdĺžnych pohľadov podľa Internej normy č. 22–102–01/01.

Pri využití IN 22-103-01/01 sa zo súboru priečných rezov môže vyhodnotiť priemerný počet vlákien v priečnom reze, efektívne zaplnenie, efektívny priemer priadze a priemerný radiálny priebeh zaplnenia. Výsledok pre efektívny priemer je uvedený v tab. 2.1.

V IN 22–102–01/01 je zo získaných priečných pohľadov stanovený polomer priadze ako vzdialenosť od osi priadze v *mm*, ktorá zodpovedá 50% funkcie chľapatosti. Priemer priadze je dvojnásobkom tejto vzdialenosti. Výsledky (vrátane intervalu spoľahlivosti na hladine významnosti 0,05) sú uvedené tiež v tab. 2.1.

2.2.4 Zaplnenie

Zaplnenie priadze podľa Internej normy č. 22–103–01/01 možno získať dvoma metódami. Prvá metóda, tzv. priama spočíva v presnom obtiahnutí kontúr vlákien v priečnom reze priadze a následnom spracovaní, pri ktorom sa určí os priadze z ťažísk jednotlivých vlákien. Potom sa rez rozčlení na medzikružia so stredom v osi priadze a z plochy, ktorú majú vlákna v jednotlivých medzikružiach sa stanoví zaplnenie, ako pomer plochy vlákien k ploche medzikružia. Efektívny priemer zodpovedá hodote radiálneho zaplnenia 0,15. Efektívne zaplnenie je podiel plochy vlákien v kruhu o efektívnom priemere k ploche tohoto kruhu.

Druhá metóda, nazývaná Secant, má výhodu v tom, že sa na začiatku nemusia označovať obrisy vlákien, ale označia sa iba ich ťažiská. Ďalej je postup podobný ako v prvej metóde. Táto metóda bola použitá preto, lebo je vhodná pre meranie zaplnenia u bavlnených priadzí. Týmto postupom bola získaná hodnota zaplnenia uvedená v tab. 2.1.

2.2.5 Jemnosť

Jemnosť priadze sa zisťuje pomocou gravimetrickej metódy (ČSN EN ISO 2060) tak, že sa navinie určitá dĺžka priadze, zváži sa a jemnosť sa prepočíta zo základného de-

finičného vzťahu: $T[te\text{x}] = \frac{m[g]}{l[km]}$. Výsledky merania spolu s intervalom spoľahlivosti na hladine významnosti 0,05 sú uvedené v tab. 2.1.

2.2.6 Zákrut

Na skúšanie zákrutov podľa ČSN 0701, alebo ČSN EN ISO 2061 sa používajú 3 metódy:

1. priama metóda pre súkané nite
2. metóda nepriama s napínačom a obmedzovačom (používa sa pre jednoduché priadze pradené z krátkých–staplových vlákien)
3. metóda nepriama do prekrútenia (používa sa pre hodváb)

Keďže bola skúšaná jednoduchá priadza, zákrut bol skúšaný druhou metódou. Výsledky sú v tab. 2.1.

Efektívny priemer z pozdĺžnych pohľadov [mm]	0,25	
Efektívny priemer z priečných rezov [mm]	0,232	IS: < 0,225; 0,239 >
Efektívne zaplnenie [1]	0,444	IS: < 0,426; 0,461 >
Jemnosť $T[te\text{x}]$	33	IS: < 33,73; 32,71 >
Zákrut $Z[m^{-1}]$	736	IS: < 719; 752 >

Tab. 2.1: *Namerané charakteristiky priadzí*

2.3 Ohybová tuhosť

Objektivita merania ohybovej tuhosti priadzí je v súčasnej dobe dosť problematická. Existuje niekoľko metód zisťovania ohybovej tuhosti, napr.:

- z ťahového diagramu (vychádzajúca z úvahy, že plošná textília je homogénny útvar a kde tuhosť v ohybe je daná vzťahom EI),
- metóda podľa Sommera, modifikovaná metóda podľa Sommera (vychádzajúca z votknutého prúžku textílie, zaťaženie vlastnou hmotnosťou a odčítaní uhla medzi koncom prehnutej vzorky a horizontálou),
- metóda podľa ČSN 80 0858 (je založená na elektrickom snímaní ohybovej sily. Prúžok textílie sa upne do čeľuste, ktorá sa natáča a pritlačuje prúžok textílie k meracej čeľusti),
- metóda ohybu podľa Mevalda a Fridrichovej (metóda merania vychádza z princípu, aplikovaného na tkaniny; tkanina je na jednom konci votknutá, druhý koniec je previslý; vstupnými hodnotami programu sú: odčítaný uhol previsu, dĺžka vysunutej vzorky a plošná merná hmotnosť (alebo jemnosť priadze či

vlákna). Výpočtové vzťahy pre ohybovú tuhosť boli implementované do programu MathCad, kde sa pomocou iteračnej metódy vypočíta hodnota ohybovej tuhosti),

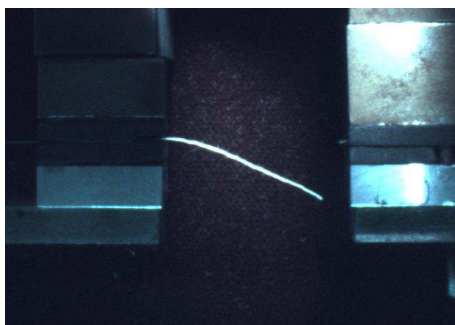
- metóda podľa Stříže (vychádza zo stanovenia mernej tiaže textílie, jej dĺžky a po odčítaní z tvaru priehybovej čiary sa stanoví ešte ťažisko ohybovej krivky a poloha jej konca).

Výsledky skorších meraní nasvedčujú tomu, že hodnoty získané jednotlivými metódami sa líšia.

Pre svoju jednoduchosť a časovú nenáročnosť bola použitá metóda podľa prof. Stříže [11].

K dispozícii boli dáta, ktoré boli namerané na prístroji pred úpravou (pri upínaní bol deformovaný prierez a tým sa menila ohybová tuhosť). Stredná hodnota, rozptyl a interval spoľahlivosti na hladine významnosti 0,05 sú uvedené v tab. 2.2.

V našom prípade bola ohybová tuhosť meraná na upínacej dĺžke 3cm. Bolo získaných 40 snímok tvaru ohybovej čiary, príklad vid' obr. 2.1. Tieto snímky boli



Obr. 2.1: *Tvar ohybovej krivky*

spracované podľa IN 22–201–01/01 v Matlabe a boli štatisticky spracované (vid' tab. 2.2).

	pred úpravou	po úprave
stredná hodnota $[mNm^{-2}]$	2,208	3,085
rozptyl $[(mNm^{-2})^2]$	0,181	0,714
interval spoľahlivosti $[mNm^{-2}]$	$< 1,927; 2,489 >$	$< 2,823; 3,347 >$

Tab. 2.2: *Namerané ohybové tuhosti priadzi*

Pre vyhodnotenie závislosti obidvoch meraní bol podľa [8] použitý test hypotéz o rovnosti parametrov dvoch normálnych rozdelení.

Ako prvá sa testovala hypotéza o rovnosti rozptylov. Proti nulovej hypotéze, že sa rozptyly rovnajú, bola položená alternatíva, že rozptyl dát získaných po úprave upínacieho zariadenia je väčší. Hypotéza bola zamietnutá, alternatíva bola prijatá.

Po tomto teste sa testovala hypotéza o rovnosti stredných hodnôt pri nerovnakých rozptyloch. Aj v tomto prípade bola proti nulovej hypotéze, že sa stredné hodnoty rovnajú, položená alternatíva, že stredná hodnota dát získaných po úprave upínacieho zariadenia je väčšia. Hypotéza bola zamietnutá, alternatíva bola prijatá.

Z toho vyplýva, že hodnoty nemajú rovnaké parametre, tzn. že výsledky meraní pred úpravou a po úprave upínacích čelustí nie sú porovnateľné.

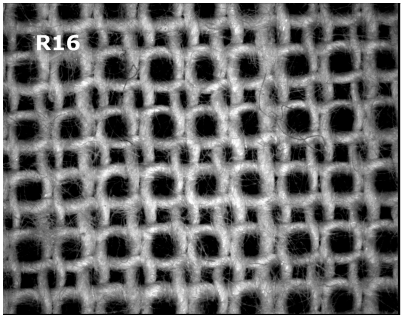
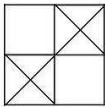
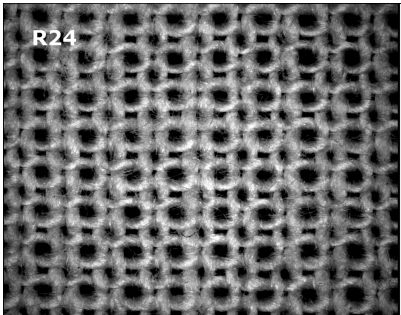
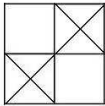
2.4 Vplyv ohybu na geometriu tkanín

Na posúdenie vplyvu ohybu priadzí na geometriu tkanín boli k dispozícii 2 súbory dát. Jednak to boli dáta namerané za účelom získania vstupov do modelu a jednak to boli dáta známe o tkaninách a priadkach z nich vyrobených. V tabuľkách sú vyhodnotené vplyvy ohybu priadzí pre jednotlivé väzby.

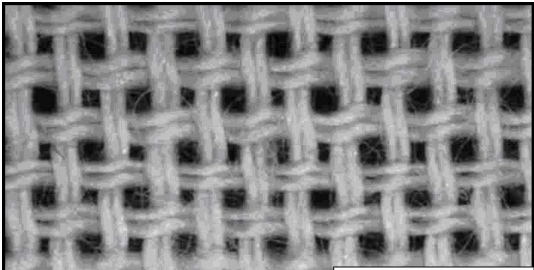
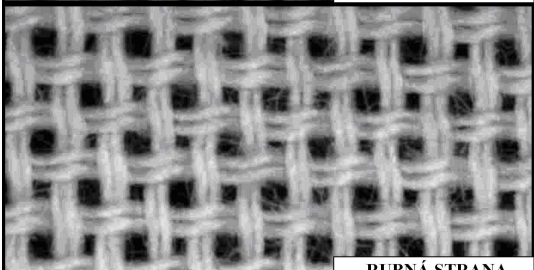
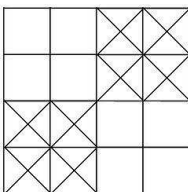
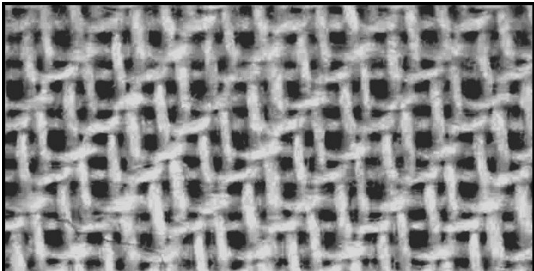
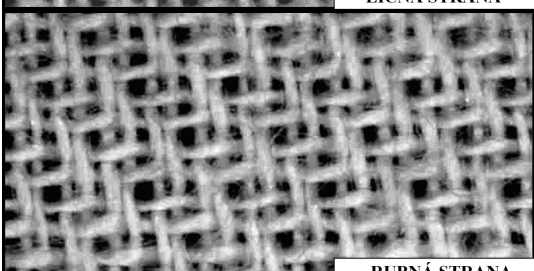
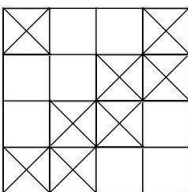
V prvej tabuľke sú uvedené tkaniny z priadze o jemnosti 33tex . Jedná sa o reznú tkaninu s dostavami uvedenými v tab. 2.3. Ohybová tuhosť priadze je $3,085[mNm^{-2}]$.

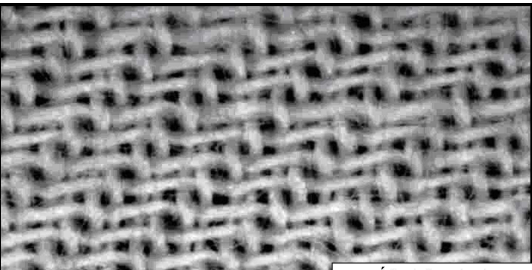
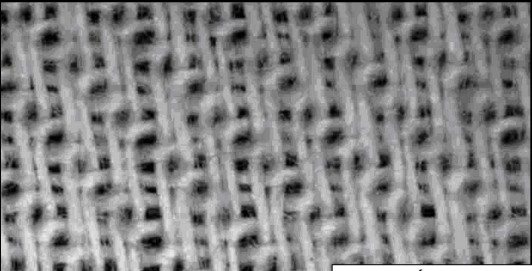
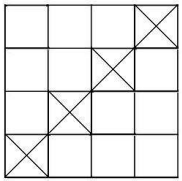
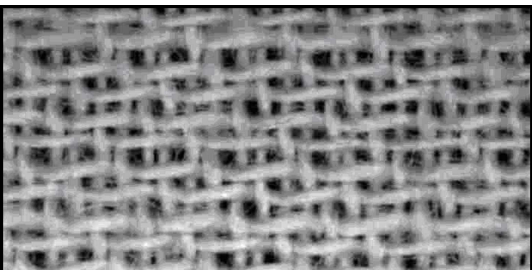
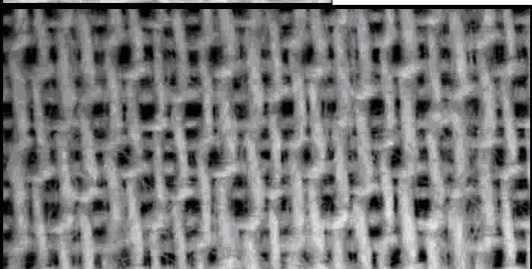
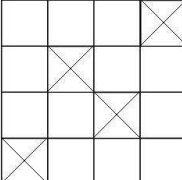
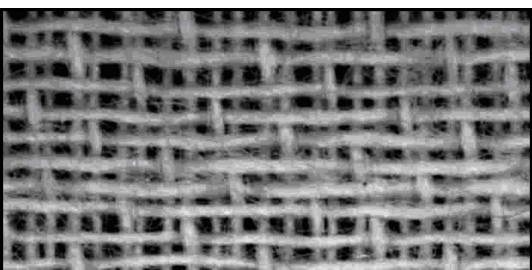
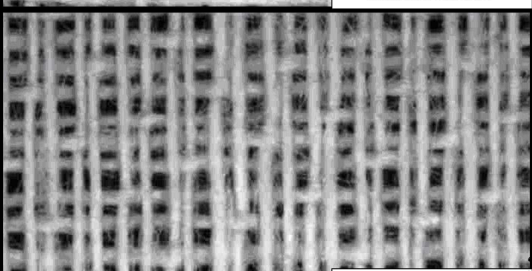
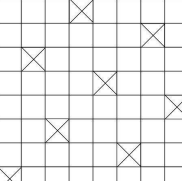
	dostava osnovy [n./10cm]	dostava útku [n./10cm]
R16	200	160
R24	200	240

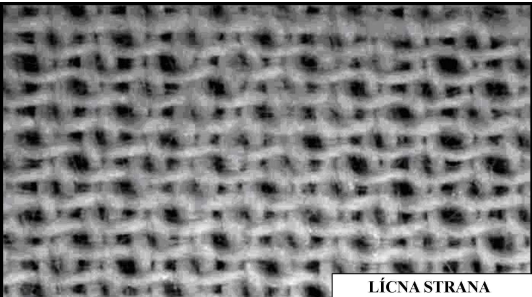
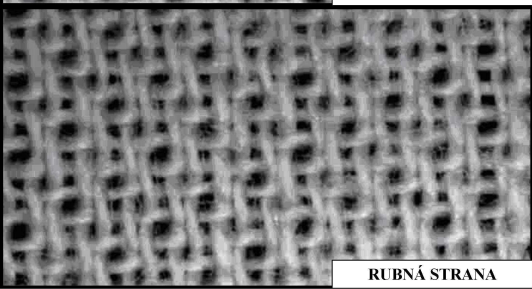
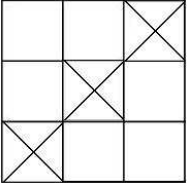
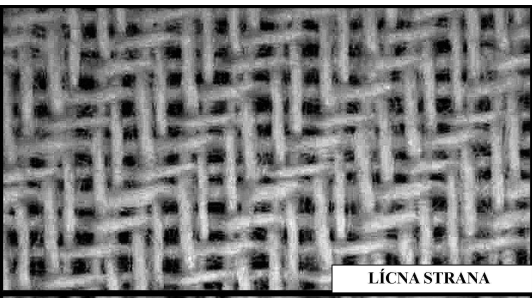
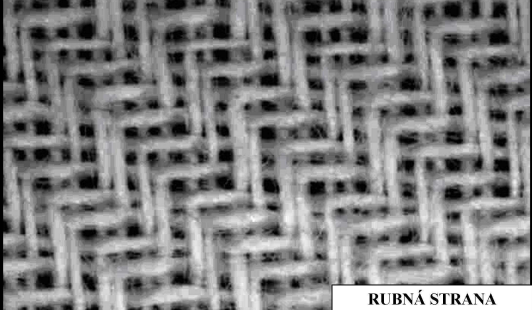
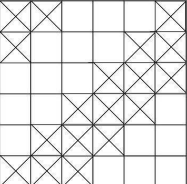
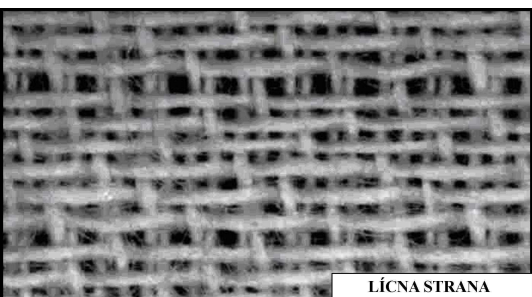
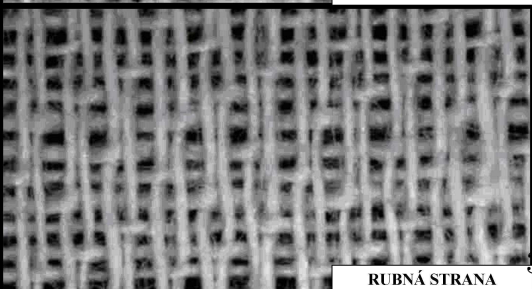
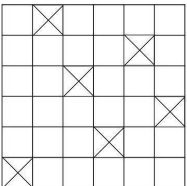
Tab. 2.3: Dostavy

obrázok tkaniny	väzba	vyhodnotenie
		na tejto tkanine s menšou útkovou dostavou je veľmi dobre vidno, ako sa správajú priadze pri ohybe – hlavne ich vybočenie z roviny ohybu
		na tejto vzorke je rovnako viditeľné vybočovanie, dostava je väčšia (priadza je viac ohýbaná) a tak sa efekt ešte zväčšuje

Ďalej bude popísaný vplyvu ohybu priadzi pre tkaniny s rôznymi väzbami. Tkaniny sú vyrobené z jednoduchej česanej prstencovej bavlnenej priadze o jemnosti $14,5\text{tex}$ a so zákrutom $1023[m^{-1}]$. Dostava osnovy je $388n./10cm$ a dostava útku $350n./10cm$. Ohybová tuhosť priadze, z ktorej sú tkaniny vyrobené je $1,197[mNm^2]$.

obrázok tkaniny	väzba	vyhodnotenie
 <p>LÍČNA STRANA</p>  <p>RUBNÁ STRANA</p>		<p>v tomto prípade je pri zdvojení priadzi veľmi dobre vidno vyklonenie osi priadze z roviny ohybu; priadza má na efekty pri ohybe dostatok priestoru</p>
 <p>LÍČNA STRANA</p>  <p>RUBNÁ STRANA</p>		<p>efekty sprevádzajúce ohýb priadze nie sú natoľko zreteľné ako u predchádzajúcej väzby, aj keď zostávajú pozorovateľné</p>

obrázok tkaniny	vázba	vyhodnotenie
 <div data-bbox="627 521 786 544">LÍCNÁ STRANA</div>  <div data-bbox="627 813 786 835">RUBNÁ STRANA</div>		<p>pri tejto väzbe je výborne viditeľné vyklonenie jednak osnovy a jednak útku, pravdepodobne preto, že na to väzba dáva dostatok priestoru</p>
 <div data-bbox="627 1126 786 1149">LÍCNÁ STRANA</div>  <div data-bbox="627 1417 786 1440">RUBNÁ STRANA</div>		<p>táto väzba rovnako ako predchádzajúca umožňuje osi na vybočenie pri ohybe dostatočný priestor</p>
 <div data-bbox="627 1753 786 1776">LÍCNÁ STRANA</div>  <div data-bbox="627 2045 786 2067">RUBNÁ STRANA</div>		<p>vybočenia v tejto väzbe nie sú také veľké, zrejme z toho dôvodu, že priadza sa málo ohýba a potom nasleduje dlhý rovný úsek</p>

obrázok tkaniny	väzba	vyhodnotenie
 <p>LÍCNÁ STRANA</p>  <p>RUBNÁ STRANA</p>		<p>pri podrobnejšom pohľade na tkaninu utkanú touto väzbou sú tiež viditeľné vybočenia, pretože priadza je ohýbaná vo viacerých miestach</p>
 <p>LÍCNÁ STRANA</p>  <p>RUBNÁ STRANA</p>		<p>pri tejto väzbe je viditeľné len malé vybočenie; zrejme kvôli tomu, že priadza je ohnutá na veľkej krivosti</p>
 <p>LÍCNÁ STRANA</p>  <p>RUBNÁ STRANA</p>		<p>v tomto prípade štruktúra väzby spôsobuje, že priadza, aj napriek tomu, že obsahuje dlhé rovné úseky, je vo väznom bode ohnutá na dostatočnú krivosť, preto je vybočenie viditeľné</p>

2.5 Výsledky praktickej časti

V prvom rade je nutné pripomenúť, že nameraná ohybová tuhosť je $3,085mNmm^2$. Simuláciou bola táto hodnota v rozmedzí od $1,203mNmm^2$ (pre konštantný závit) do $1,329mNmm^2$ (pre konštantné stúpanie). Rádovo teda vychádza ohybová tuhosť zhodná, pri modelovaní je však menšia.

Tento model možno teda s ohľadom na nepresnosť merania ohybovej tuhosti považovať za pomerne dôveryhodný.

Ďalšia vec, ktorá stojí za spomenutie sú výsledky porovnávania vplyvu ohybu osnovných a útkových nití na vzhľad väzby tkaniny. Z jedinej priadze tak možno vytvoriť štruktúry, kde sa ohýbaná priadza správa rozdielne.

Záver

S ohyбом je typicky spojená vlastnosť materiálu nazývaná ohybová tuhosť. Z názvu vyplýva, že definuje odpor, ktorý kladie ohýbané médium voči sile, ktorá na ňu pôsobí.

V textilnej vede to môže znamenať mnoho. Ohybová tuhosť priadze ovplyvňuje vzhľad tkaniny, či pleteniny, a ohybová tuhosť plošných textílií ovplyvňuje tiež ďalšie vlastnosti, ako je splývavosť. Je preto dobré už pred samotnou výrobou textílií vedieť, ako sa môžu zachovať pri danom zaťažení. Práve preto bol v tejto práci vyvinutý model, ktorý sa zaoberal popisom správania sa priadze pri ohýbaní.

Ako už bolo spomenuté v závere praktickej časti, tento model dáva v porovnaní so skutočne nameranými hodnotami pomerne dobré výsledky. Hodnoty sú blízke, čo je významným krokom k ďalšiemu možnému vylepšovaniu modelu.

Zoznam použitých prameňov

- [1] BARTSCH, H. J. *Matematické vzorce*. 3. vyd. Praha: Mladá fronta, 2002. 832 s. ISBN 80-204-0607-7.
- [2] ČERNÝCH, K. F. *Vvedenie v anizotropnuju uprugnosti*. Moskva: Nauka, 1988.
- [3] ELIAŠ, J., et al. *Zbierka úloh z vyššej matematiky: 1.časť*. 3. vyd. Bratislava: Nakladateľstvo Alfa, 1971. 296 s.
- [4] GÖKTEPE, F., LAWRENCE, C. A., LEAF, G. A. Deformation of a Single Helix Under Simultaneous Application of Extension, Compression, and Bending. *Textile Research Journal*, 2000, vol. 70, no. 6, s. 508–518.
- [5] MILITKÝ, J., VANÍČEK, J. *Vlastnosti vláken: Ultimatívni mechanické chováni a porušení vláken* [online]. c2004–2005; [cit.2006-05-07]. <<http://www.ft.vslib.cz/depart/ktm/files/20060106/VlastnostiVlaken-prednaska9.pdf>>.
- [6] MORTON, W.E., HEARLE, J.W.S. *Physical Properties of Textile Fibres*. 3rd edition. Manchester: The Textile Institute, 1993. 725 s. ISBN 1-870812-41-7.
- [7] NECKÁŘ, B. *Morfologie a strukturní mechanika obecných vláknenných útvarů*. 2. vyd. Liberec: Technická univerzita, 2001. 243 s. ISBN 80-7083-473-0.
- [8] POTOCKÝ, R., et al. *Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky*. 1. vyd. Bratislava: Nakladateľstvo Alfa, 1986. 392 s.
- [9] *Prednášky z predmetu Metody stochastického a simulačného modelování*. Zimný semester 2004/2005.
- [10] STŘÍŽ, B. *Pružnost a pevnost: 1. díl*. 3. vyd. Liberec: Vysoká škola strojní a textilní, 1989. 241 s. ISBN 80-7083-013-1.
- [11] STŘÍŽ, B. *Mechanika textilií: Část 2. Aplikace mechaniky kontinua*. 1. vyd. Liberec: Technická univerzita, 2003. 83 s. ISBN 80-7083-692-X.